TD : Ensembles non dénombrables

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

FIGURE 1 – Les ensembles infinis Image extraite de : www.lespritsorcier.org

Propriété 1. *Soient A et B des ensembles infinis,*

1. *Si $|A| = |B|$ alors il existe une bijection $A \to B$;*
2. *Si $|A| < |B|$ alors il existe une injection $A \to B$, mais pas de surjection $A \to B$;*
3. *Si $|A| \leq |B|$ alors $|A| < |B|$ ou $|A| = |B|$.*

Théorème 1 (Cantor-Bernstein-Schroëder)**.**
Si *A et B sont deux ensembles infinis, et qu'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A,* ***alors*** *il existe une bijection de A sur B.*

Question 1. *Montrer le théorème 1.*

Exercice Propriétés

Question 1. *Soient A et B des ensembles infinis, montrer que* ***si*** $A \subseteq B$ *et qu'il existe une injection* $g : B \to A$, ***alors*** $|A| = |B|$.

Question 2. *Soient A et B des ensembles infinis, montrer que* ***Si*** *A n'est pas dénombrable et* $A \subseteq B$, ***alors*** *B n'est pas dénombrable.*

Question 3. *Soient A et B des ensembles infinis, montrer que* ***Si*** *A n'est pas dénombrable et* $g : A \to B$ *est injective,* ***alors*** *B n'est pas dénombrable ;*

Exercice Comparaison de cardinalité

Question 1. *Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Question 2. *Montrer que les intervalles $[0, 1)$ et $(0, 1)$ de $\mathbb{R}$ ont même cardinalité.*

Question 3. *Montrer que les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont même cardinalité.*

Question 4. *Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinalité.*

Question 5. *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$, montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ ont même cardinalité.*

Question 6. *Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, montrer que $\mathcal{G}$ n'est pas dénombrable.*

Question 7. *Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$, montrer que $|\mathbb{R}| < |\mathcal{H}|$.*

Exercice Combinatoire et décidabilité

Question 1. *Soit A un alphabet, montrer que tout problème de décision sur A^* réalise une partition de A^*. En déduire qu'il existe une bijection entre l'ensemble des problèmes de décision sur A^* et l'ensemble des langages sur A.*

Question 2. *Déduire de la question précédente que la plupart des problèmes sont indécidables.*